

### Exercice p.130

$$T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

1) T est linéaire . Calculons

$$\bullet T\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha d & \alpha b \\ 0 & \alpha a \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \alpha T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

$$\bullet T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} d+d' & b+b' \\ 0 & a+a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}$$

$$= T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$$

2) On cherche la matrice

$$\left( [T(e_1)]_e \dots [T(e_4)]_e \right)$$

$$\text{où } e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont les éléments de la base canonique de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exprimons ces matrices dans la base

$$\mathcal{C} = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{c_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{c_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{c_4} \right)$$

$$T(e_1) = c_1 - c_3 \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = c_4 \quad T(e_4) = c_3$$

Finalement, la matrice cherchée s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$